数理解析研究所講究録 1218 巻 2001 年 69-82

枠付き頂点作用素代数の構成

山内 博*

平成 12 年 10 月 12 日

1 Ising 模型 SVOA の構成

ここではこれから構成していく VOA の材料ともいうべき最小単位の SVOA として Ising 模型 SVOA を構成する。

1.1 Vir-module $V_{1/2}$

まずクリフォード代数を説明する。内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を持つベクトル空間 L を考える。L のテンソル代数 $T(L)$ を $\{x\otimes y+y\otimes x-\langle x,y\rangle : x,y\in L\}$ で生成される両側イデアル I で割った剰余環 $\mathrm{Cliff}(L):=T(L)/I$ をクリフォード代数という。ここでは $L=\mathbb{C}^{\infty}$ とし、内積を一つの基底 $\{\alpha_i : i\in\mathbb{Z}\}$ に関してこれが正規直交基底となるように入れる。このとき基底を次のように取りかえてみる。$m>0$ に対して $\psi_{m+\frac{1}{2}}=\alpha_{m-1}+\sqrt{-1}\alpha_{-m}$, $\psi_{-m+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\alpha_{m-1}-\sqrt{-1}\alpha_{-m})$ として $\{\psi_m : m\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}\}$ とするとこれは新しい基底であり、$\langle\psi_m,\psi_n\rangle=\delta_{m+n,0}$ となっている。この基底からクリフォード代数 の積を見てみると $[\psi_m,\psi_n]_+ :=\psi_m\psi_n+\psi_n\psi_m=\delta_{m+n,0}$ となっている。こうして無限次元のクリフォード代数が構成できた。次にこの表現を考える。$\mathrm{Cliff}(\mathbb{C}^{\infty})$ の元を $\psi_m=\xi_m\ (m<0)$, $\psi_m=\frac{\partial}{\partial\xi_m}\ (m>0)$ として作用させる事により外積代数 $V_{1/2}:=\Lambda[\xi_m : m\in\mathbb{Z}_{<0}+\frac{1}{2}]$ 上に $\mathrm{Cliff}(\mathbb{C}^{\infty})$ の表現が得られる。ここで微分は交代的にしていくものとしている。この表現を使って

$$L_k := \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} j : \psi_{-j}\psi_{j+k} :$$

を作る。ここで $:\psi_{-j}\psi_{j+k}:$ は正規順序積を表し、

$$:\psi_{-j}\psi_{j+k}: \ = \begin{cases}\psi_{-j}\psi_{j+k} & \text{if } -j\le j+k\\ \psi_{j+k}\psi_{-j} & \text{if } -j>j+k\end{cases}$$

*e-mail :hirocci@math.tsukuba.ac.jp

である。これは $V_{1/2}$ 上の作用素として well-defined であり、直接計算から $[\psi_m, L_k] = (m + \frac{1}{2}k)\psi_{m+k}$ が成り立つ事が分かる。これらはヴィラソロ関係式

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}\cdot\frac{1}{2}$$

を満たす事も直接計算から示せ、$V_{1/2}$ 上に中心電荷 $\frac{1}{2}$ の ヴィラソロ代数の表現を与える (cf. [KR] 3 章)。また、多項式環の外積代数として $V_{1/2}$ には各単項式を正規直交基底する双線形内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ を入れる事ができ、この内積に関して $\langle\psi_m A|B\rangle = \langle A|\psi_{-m}B\rangle$ が成立している。即ちこれは 反傾形式になっている。この内積に関して $\langle L_n A|B\rangle = \langle A|L_{-n}B\rangle$ もまた成立するので、ここまでをまとめて $V_{1/2}$ は 中心電荷 $\frac{1}{2}$ のヴィラソロ代数のユニタリー表現を与えることが分かった。よって この内積から $V_{1/2}$ はヴィラソロ加群として完全可約であることが分かる。中心電荷 $\frac{1}{2}$ の既約ユニタリー表現は最高ウェイトが $h = 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}$ のときの3つしかないことが知られていて、これらは $L(\frac{1}{2}, h)$ と書かれる。$V_{1/2}$ には最高ウェイト $\frac{1}{16}$ のベクトルはなく、最高ウェイトベクトルは最高ウェイト 0 の $\mathbf{1}$ と最高ウェイト $\frac{1}{2}$ の $\xi_{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}$ の 2 個しか有り得ない。そこで L_0 に関するウェイトが整数である部分空間を $V_{1/2}^+$、半整数である部分空間を $V_{1/2}^-$ と表すとこれらは部分加群になっていて、ヴィラソロ加群として $V_{1/2} = V_{1/2}^+ \oplus V_{1/2}^-$ と分解し、$V_{1/2}^+ \simeq L\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $V_{1/2}^- \simeq L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ である。よって指標公式として

$$\mathrm{ch}L\left(\frac{1}{2}, 0\right) \pm \mathrm{ch}L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \prod_{n=0}^{\infty}\left(1 \pm q^{n+\frac{1}{2}}\right)$$

を得る。

ここまでクリフォード代数の半整数型の基底を使って考えてきたが、新しく次のように基底を取り換える。$\psi_0 = \alpha_0$, $m > 0$ については $\psi_m = \alpha_m + \sqrt{-1}\alpha_{-m}$, $\psi_{-m} = \frac{1}{2}(\alpha_m - \sqrt{-1}\alpha_{-m})$ としてクリフォード代数 $\mathrm{Cliff}(\mathbb{C}^\infty)$ に $\langle\psi_m, \psi_n\rangle = \delta_{m+n,0}$ を満たす整数型の基底 $\{\psi_m : m \in \mathbb{Z}\}$ を取る。この表現を $V_0 := \Lambda[\xi_m : m \in \mathbb{Z}_{\leq 0}]$ 上に先程と同じように作ってみる。$m \neq 0$ のときは同様でいいが、$m = 0$ のときには

$$\psi_0 \to \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_0 + \partial/\partial\xi_0)$$

とすることで整合性がとれ、正規順序積を用いてヴィラソロの作用素を次のように作れる。

$$L_k := \frac{1}{16}\delta_{k,0} + \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbf{Z}} j : \psi_{-j}\psi_{j+k} :$$

こうして V_0 上にヴィラソロ代数の中心電荷 $\frac{1}{2}$ の表現が作れた。V_0 には最高ウェイトベクトルが共に最高ウェイト $\frac{1}{16}$ である $\mathbf{1}$ と $\xi_0\mathbf{1}$ の 2 つあり、これから V_0 はこれらを最高ウェイトベクトルとする部分加群に $V_0 = V_0^+ \oplus V_0^-$ と分解する。$V_{1/2}$ と同様に V_0 にも反傾形式があり、それゆえヴィラソロ加群として完全可約であ

る。先程と同様に中心電荷 $\frac{1}{2}$ のヴィラソロ代数のユニタリー表現の最高ウェイトの関係からこれらは既約であり、$L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})$ に同型である。よってヴィラソロ頂点作用素代数 $L\left(\frac{1}{2},0\right)$ の既約加群 $V_0^+ \simeq V_0^- \simeq L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})$ が構成できた。この表現から指標公式

$$\mathrm{ch}L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right) = q^{\frac{1}{16}}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)$$

が得られる。

1.2 Local system と SVOA

次に $\mathrm{End}(V_{1/2})$ を考える。先程構成した $V_{1/2}$ 上の線形変換の母関数 $a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{-n-1} \in \mathrm{End}(V_{1/2})[[z,z^{-1}]]$ であって、関係式

$$[L_{-1},a(z)] = a'(z)\ (= \frac{d}{dz}a(z))$$

を満たし、$v \in V_{1/2}$ に対して $a(z)v \in V_{1/2}((z))$ となるものを考える。これらは $V_{1/2}$ 上の量子作用素と呼ばれ、これら全体を $Q(V_{1/2})$ で表すことにする。このとき $L(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$, $\psi(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_{n+\frac{1}{2}} z^{-n-1}$ は量子作用素である。$\mathrm{End}(V_{1/2})$ は次のように分解できる;

$$\mathrm{End}^+(V_{1/2}) := \{f \in \mathrm{End}(V_{1/2}) \mid f(V_{1/2}^{\pm}) \subset V_{1/2}^{\pm}\},$$
$$\mathrm{End}^-(V_{1/2}) := \{f \in \mathrm{End}(V_{1/2}) \mid f(V_{1/2}^{\pm}) \subset V_{1/2}^{\mp}\}$$

として $\mathrm{End}(V_{1/2}) = \mathrm{End}^+(V_{1/2}) \oplus \mathrm{End}^-(V_{1/2})$ と表せる。今の場合、$L(z) \in \mathrm{End}^+(V_{1/2})[[z,z^{-1}]]$, $\psi(z) \in \mathrm{End}^-(V_{1/2})[[z,z^{-1}]]$ である。2つの量子作用素 $a(z), b(z)$ が局所可換であるとは、$\exists N > 0$ であって

$$(z_1-z_2)^N\{a(z_1)b(z_2) - (-1)^{|a||b|}b(z_2)a(z_1)\} = 0$$

であるときと定義し、$a(z) \sim b(z)$ と書くことにする。ここで $|a|$ は $a(z) \in \mathrm{End}^+(V_{1/2})[[z,z^{-1}]]$ のとき 0, $a(z) \in \mathrm{End}^-(V_{1/2})[[z,z^{-1}]]$ のとき 1 とし、線形に $Q(V_{1/2})$ 全体に拡張する。$1(z) = \mathrm{id}_{V_{1/2}}$ は $Q(V_{1/2})$ の全ての元と局所可換であり、$L(z) \sim L(z)$, $\psi(z) \sim \psi(z)$, $L(z) \sim \psi(z)$ であることも直接計算から示すことができる。よって $Q(V_{1/2})$ の部分集合で $1(z)$, $L(z)$, $\psi(z)$ を含むもので極大なものを1つとりこれを W と表す。このとき Dong の補題から W は n-正規積で閉じていることが分かる。よって $a(z)_n$ で $a(z)$ による n-正規積をとることを表すことにして W 上に頂点作用素を

$$Y(a(z),Z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(z)_n Z^{-n-1}$$

と定義することにより $\{W, Y(-,Z), 1(z), L(z)\}$ は SVOA になることが示せる (cf.[Li])。こうして $1(z)$, $L(z)$, $\psi(z)$ らから n-正規積で生成される SVOA を作

ることができ、これは先の極大集合 W らの共通部分にあたり、W の取り方に依らずに一意に構造が定まる。この SVOA を M と名付ける。

1.3 Minimal SVOA $L\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

前節で構成した SVOA を用いて $V_{1/2}\simeq L\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ に SVOA 構造を導入する。写像

$$\begin{array}{cccc}\Phi: & M & \to & V_{1/2}\\ & a(z) & \mapsto & a_{-1}\cdot\mathbf{1}\end{array}$$

を考える。詳細は参考文献に任せるとして[1]、この対応は SVOA としての準同型を与える。即ち $\Phi\left(a(z)_n b(z)\right)=a(z)_n\Phi\left(b(z)\right)$ が成立する。$V_{1/2}$ はヴィラソロ加群として 既約な部分加群の和で書けているのでこの写像は全射であり、$\mathrm{Ker}\Phi$ は M のイデアルになっているので $M/\mathrm{Ker}\Phi\simeq L\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ (VOA としての同型) が分かる。この同型より $\Phi\left(1(z)\right)=\mathbf{1}$ を真空元, $\Phi\left(L(z)\right)=\frac{1}{2}\psi_{-\frac{3}{2}}\psi_{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}$ をヴィラソロ元として $L\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ は SVOA になる。$L\left(\frac{1}{2},0\right)$ においてヴィラソロ加群としてイデアルは VOA としてのイデアルでもあるので、ヴィラソロ加群として単純な $L\left(\frac{1}{2},0\right)$ は VOA としても単純であり、その加群である $L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ も既約である。こうしてクリフォード代数から出発して SVOA $L\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ が構成できた。せっかく具体的に構成したのだから、ここでこの SVOA が非常に小さいものであることを見てみよう。

(S)VOA の自己同型とは線形同型 θ であって、頂点作用素に対して $\theta Y(*,z)\theta^{-1}=Y(\theta*,z)$ が成立し、$\theta\mathbf{1}=\mathbf{1}$, $\theta\omega=\omega$ となるものである。それでは今構成した SVOA $L\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ の自己同型を決定してみよう。まず単純 VOA の部分 $L\left(\frac{1}{2},0\right)$ の元は真空元とヴィラソロ元から生成されている。即ち $\omega_{i_1}\cdots\omega_{i_n}\mathbf{1}$ という形の元で張られているのだが、これは自己同型の定義からすべて固定される。よって $L\left(\frac{1}{2},0\right)$ 上では $\theta=1$ である。$L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ は最高ウェイト $\frac{1}{2}$ の最高ウェイトベクトル $\psi_{-1/2}\mathbf{1}$ から生成されるの既約ヴィラソロ加群であるから、 $\omega_{i_1}\cdots\omega_{i_n}\psi_{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}$ という形の元で張られている。自己同型の定義からこの元の θ による像は $\theta\psi_{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}$ の値で定まる。$\psi_{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}$ は $L\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ の唯一の 次数 $\frac{1}{2}$ の元なので、自己同型は次数を保つので $\theta\psi_{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}=k\psi_{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}$ である。この k を定める。ここで $(\psi_{-\frac{1}{2}}\mathbf{1})_{-2}(\psi_{-\frac{1}{2}}\mathbf{1})$ を計算してみる。$(\psi_{-\frac{1}{2}}\mathbf{1})_{-2}(\psi_{-\frac{1}{2}}\mathbf{1})=\Phi(\psi(z))_{-2}\Phi(\psi(z))=\Phi(\psi(z)_{-2}\psi(z))=\psi_{-\frac{3}{2}}\psi_{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}=2\omega$ であるから、これに θ を作用させることにより $k^2=1$ が分かる。よって $k=\pm1$ より、自明でない自己同型は $L\left(\frac{1}{2},0\right)$ 上 1, $L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 上 -1 のみであることが分かる。

[1]宮本先生の大阪大での講義録等

2 Ising 模型のフュージョン規則と自己同型

2.1 フュージョン規則

V を VOA、(M^i, Y^i) $(i = 1,2,3)$ をその既約加群とするとき、写像 $I : M^1 \otimes M^2 \to M^3\{z\}$ が次の条件：

(1) $I(u^1, z)u^2 \in M^3((z))$
(2) $I(L_{-1}u^1, z)u^2 = \dfrac{d}{dz}I(u^1, z)u^2$
(3) $\exists N \gg 0$ s.t. $(z-w)^N\{Y^3(a,z)I(u^1,z) - I(u^1,z)Y^2(a,z)\}u^2 = 0$
(4) $I(a_n u^1, z)u^2 = Y(a,z)_n I(u^1,z)u^2$

を満たしているとき、$\binom{M^3}{M^1\ M^2}$- 型の intertwining operator という。ここで $u^i \in M^i$, $a \in V$ である。そして intertwining operators で張られる線形空間全体を $I\binom{M^3}{M^1\ M^2}$ で表す。

以下、V は有理型であるとし、M^i $(i = 1, 2, \cdots, r)$ をその全ての既約加群とする。このとき形式的に M^i らを基底と見て $\mathbb{Z}$-加群 $L := \mathbb{Z}M^1 \oplus \mathbb{Z}M^2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}M^r$ に次のように積を導入する；$\dim I\begin{pmatrix} M^k \\ M^i\ M^j \end{pmatrix} = N_{ij}^k$ として

$$M^i \times M^j := \sum_{l=1}^{r} N_{ij}^l M^l \qquad (*)$$

このとき、この積で L は 可換環になる [FHL]。この環をフュージョン代数という。また、積 $(*)$ をフュージョン規則という。

このフュージョン規則の応用として、sub VOA との関係がある。

定理 W が V の有理型 sub VOA であるとき、V は W-加群になる。

この定理は W のヴィラソロ元が V のものと一致しているときには自明であるが、一致していなくても成り立つ。よって VOA V をその sub VOA W の加群と見て分解したとき、V の頂点作用素は W の加群間の intertwining operator を与える。ゆえに、フュージョン規則が分かっていると V の積の構造がよく分かるのである。これから考えるのは V が sub VOA として $L\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ を含んでいるときである。

2.2 Ising 模型のフュージョン規則

ここではヴィラソロ VOA $L\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ について考える。$L\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ は非常に扱いやすい VOA である。

定理 $L\left(\frac{1}{2},0\right)$ は有理型 VOA であり、その既約加群は $L\left(\frac{1}{2},0\right)$, $L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)$ の3つのみである。また、これらのフュージョン規則は以下の通りである。

$$\begin{aligned}
&L\left(\tfrac{1}{2},0\right) \text{ は積に関して単位元}\\
&L\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)\times L\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) = L\left(\tfrac{1}{2},0\right)\\
&L\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)\times L\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{16}\right) = L\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{16}\right)\\
&L\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{16}\right)\times L\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{16}\right) = L\left(\tfrac{1}{2},0\right) + L\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

このフュージョン規則をよく見てみると、$W^0 = \mathbb{Z}L\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus\mathbb{Z}L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $W^1 = \mathbb{Z}L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)$ として Z_2-grade を付けられることが分かる。特に W^0 はフュージョン代数の中で部分代数をなしており、この中にも $L\left(\frac{1}{2},0\right)$ の次数を 0, $L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ の次数を 1 として W^0 にも $\mathbb{Z}_2$-grade が入る。これをもとに、$L\left(\frac{1}{2},0\right)$-加群のフュージョン規則に次の様の自己同型が定義できる。

補題 $L\left(\frac{1}{2},0\right)$ の フュージョン代数 $\mathbb{Z}L\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus\mathbb{Z}L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\oplus\mathbb{Z}L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)$ に

$$\tau:\ \begin{array}{rcl}
L\left(\tfrac{1}{2},0\right) & \mapsto & L\left(\tfrac{1}{2},0\right)\\
L\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) & \mapsto & L\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)\\
L\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{16}\right) & \mapsto & -L\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{16}\right)
\end{array}$$

として位数 2 の自己同型が与えられる。また部分代数 $\mathbb{Z}L\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus\mathbb{Z}L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ においても

$$\sigma:\ \begin{array}{rcl}
L\left(\tfrac{1}{2},0\right) & \mapsto & L\left(\tfrac{1}{2},0\right)\\
L\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) & \mapsto & -L\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{16}\right)
\end{array}$$

とすることにより位数 2 の自己同型が得られる。

このフュージョン規則の自己同型をもとに VOA V の VOA としての自己同型を構成する。そのためにまず共形元の定義を与える。

$e\in V_2$ が共形元であるとは、$L'_n := e_{n+1}$ としたときこれが ヴィラソロの関係式

$$[L'_m, L'_n] = (m-n)L'_{m+n} + \frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}c$$

を満たしているときとする。ここで c は中心電荷を表す。e を共形元とするとき、これを真空元に作用させることで生成される sub VOA $\langle e\rangle := \mathrm{span}\{e_{i_1}\cdots e_{i_k}\mathbf{1}|i_1\le\cdots\le i_k<0\}$ が VOA として有理型であるとき、即ち $\langle e\rangle\simeq L(c,0)$ となるとき e を有理型共形元と呼ぶ。これから V に中心電荷 $\frac{1}{2}$ の有理型共形元 e がある場合を考えてみる。$\langle e\rangle\simeq L\left(\frac{1}{2},0\right)\subset V$ であるから、先の定理より V は $L\left(\frac{1}{2},0\right)$-加群になり、$L\left(\frac{1}{2},0\right)$ の有理性からその既約加群 $L\left(\frac{1}{2},0\right)$, $L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)$ らの直和に分解する。即ち

$$V = W_0\oplus W_{\frac{1}{2}}\oplus W_{\frac{1}{16}}$$

と表せる。ここで W_h は $L\left(\frac{1}{2},0\right)$-加群として $L(\frac{1}{2},h)$ と同型なもの全ての和を表す。この分解において V の頂点作用素は sub VOA $\langle e\rangle \simeq L\left(\frac{1}{2},0\right)$ の既約加群における intertwining operator になるので[2]、Ising 模型のフュージョン規則から先程定義したフュージョン代数の自己同型が V の VOA としての自己同型を与える。即ち

定理 $e\in V$ が中心電荷 1/2 の有理形共形元とする。V を $\langle e\rangle$-加群として $V=W_0\oplus W_{\frac{1}{2}}\oplus W_{\frac{1}{16}}$ と分解したとき、線形写像

$$\tau_e:\begin{cases} v\mapsto v & \text{if } v\in W_0\oplus W_{\frac{1}{2}} \\ v\mapsto -v & \text{if } v\in W_{\frac{1}{16}} \end{cases}$$

は V の VOA としての自己同型を与える。もし $\tau_e=\mathrm{id}_V$, 即ち $V=W_0\oplus W_{\frac{1}{2}}$ であるときは

$$\sigma_e:\begin{cases} v\mapsto v & \text{if } v\in W_0 \\ v\mapsto -v & \text{if } v\in W_{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

が VOA としての自己同型を与える。さらに $\sigma_e=\mathrm{id}_V$ である場合には $W=\{v\in V|e_1v=0\}$ とすると W が V の sub VOA になっており、VOA として $V\simeq L\left(\frac{1}{2},0\right)\otimes W$ となっている。

これが宮本先生の見つけたいわゆる宮本の自己同型である。このように共形元があるとその加群としての分解に応じて VOA の自己同型が得られる。よって共形元がたくさんあればあるほど大きな自己同型群が構成できるのである。特に、ヴィラソロ元が中心電荷 1/2 の有理型共形元の和に分割できる場合が重要である。これは次節で考察する。

2.3 Framed VOA

前部分節で中心電荷 1/2 の有理型共形元と自己同型の関係を述べた。ここでは共形元がたくさん得られる場合を考えてみる。以下、[DMZ] の概要を述べる。$V=\oplus_{n=0}^{\infty}V_n$ を単純頂点作用素代数とし、$V_0=\mathbb{C}\mathbf{1}$、ヴィラソロ元 ω が $\omega=e^1+e^2+\cdots+e^n$ と n 個の中心電荷 1/2 の有理型共形元の和で表されており、個々の共形元の頂点作用素は可換である場合を考える。このような VOA を枠付き (framed) VOA と呼ぶ。枠付きと言っているが、どんな枠が付いているかはまだ触れないでおく。このとき $T:=\langle e^1,\cdots,e^n\rangle\simeq\langle e^1\rangle\otimes\cdots\otimes\langle e^n\rangle\simeq L\left(\frac{1}{2},0\right)^{\otimes n}$ が V の sub VOA として含まれおり、さらにこれらのヴィラソロ元は一致している。$L\left(\frac{1}{2},0\right)$ は有理型なのでこれらのテンソル積である T も有理型である 。さらにテンソル

[2]正確に言うと頂点作用素の巾を少し修正する必要がある。

VOA の既約加群はそれぞれの既約加群のテンソル積であるから[3]、V は既約 T-加群 に分解し、それぞれの既約加群は $h_i \in \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}\}$ として $L(\frac{1}{2}, h_1) \otimes \cdots L(\frac{1}{2}, h_n)$ という形をしている。よって $L(h_1, \cdots, h_n) := L(\frac{1}{2}, h_1) \otimes \cdots \otimes L(\frac{1}{2}, h_n)$ とおいて、$m_{(h_1, \cdots, h_n)}$ でその重複度を表すことにして

$$V = \bigoplus_{h_i \in \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}\}} m_{(h_1, \cdots, h_n)} L(h_1, \cdots, h_n)$$

と分解できる。そして Ising 模型のフュージョン規則を考えることにより、次を得る。

定理 $h_i \in \{0, \frac{1}{2}\}$ であるとき、$m_{(h_1, \cdots, h_n)} \leq 1$ であり、

$$W = \bigoplus_{h_i \in \{0, \frac{1}{2}\}} m_{(h_1, \cdots, h_n)} L(h_1, \cdots, h_n)$$

は単純 sub VOA である。

sub VOA $W = \bigoplus_{h_i \in \{0, \frac{1}{2}\}} m_{(h_1, \cdots, h_n)} L(h_1, \cdots, h_n)$ において $\frac{1}{2}$ を 1 に読み変える、即ち $(h_1, \cdots, h_n) \mapsto (2h_1, \cdots, 2h_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ とすることにより W から 2 進語が得られる。フュージョン規則からこうして得られた 2 進語らは加法で閉じるのでコードを成す。$L\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ のウェイトは整数、$L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ のウェイトは半整数であり、V のヴィラソロ元と T のヴィラソロ元は一致するのでこのコードは偶コードである。W は共形元による自己同型 τ_{e^i} らの生成する elememtary abelian 2-group $P = \langle \tau_{e^i} | i = 1, \cdots, n \rangle$ の固定部分空間 V^P である。このようにヴィラソロ元が有理型共形元に分割できるときには自己同型の固定部分空間から一つのコードが得られる。これが一つめの枠になる。もう一つの枠を考える前に、コードと Ising 模型 VOA の関係を調べておこう。

3 コード VOA

3.1 コード VOA の構成

前節でみたようにヴィラソロ元が共形元の和に分割されているときにはその sub VOA から偶コードを得られた。ここでは逆に Ising 模型と偶コードからこのような VOA を構成する。

D を $\mathbb{Z}_2^n$ の部分偶コードとする。2 進語 $\alpha = (a_1, \cdots, a_n) \in D$ に対して §1 で構成した SVOA $L\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ の n 個のテンソル積の部分空間として $M_\alpha := L(\frac{1}{2}, \frac{a_1}{2}) \otimes \cdots \otimes L(\frac{1}{2}, \frac{a_n}{2})$ とおく。このときベクトル空間として $\{L\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}^{\otimes n} =$

[3]VOA のテンソル積の一般論については [FHL] 参照。

$\oplus_{\alpha\in\mathbb{Z}_2^n}M_\alpha$ と分解する。$u^{(\alpha)} = u^1\otimes\cdots\otimes u^n \in M_\alpha$ に対してこれの $\{L\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}^{\otimes n}$ 上の頂点作用素を $Y(u^{(\alpha)},z) := Y^1(u^1,z)\otimes\cdots\otimes Y^n(u^n,z)$ と定義する。このとき $u^{(\alpha)}\in M_\alpha$, $v^{(\beta)}\in M_\beta$ に対して $\{L\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}^{\otimes n}$ の頂点作用素は SVOA の超可換性から

$$Y(u^{(\alpha)},z)Y(v^{(\beta)},w) \sim (-1)^{\langle\alpha,\beta\rangle}Y(v^{(\beta)},w)Y(u^{(\alpha)},z)$$

を満たす。そこで $M_D := \oplus_{\alpha\in D}M_\alpha$ を考える。$M_{(0^n)} = L\left(\frac{1}{2},0\right)\otimes\cdots\otimes L\left(\frac{1}{2},0\right)\subset M_D$ より M_D にはテンソル積の各成分のヴィラソロ 元の和が入っており、この作用で非負整数次数に分解できる。D は偶コードなので $\alpha\in D$ のとき $\langle\alpha,\alpha\rangle = 0$ より $Y(u^{(\alpha)},z)Y(v^{(\alpha)},w)\sim Y(v^{(\alpha)},w)Y(u^{(\alpha)},z)$ となる。即ち M_α の各元は局所可換である。そこで M_D 全体で局所可換になるように頂点作用素を修正すれば、ヴィラソロ元が可換な有理型共形元の和となっている VOA を作れる。これを D の中心拡大を用いて実現しよう。$\mathbb{Z}_2^n$ の基底として $\mu_1 = (100\cdots0)$, $\mu_2 = (010\cdots0)$, $\cdots,\mu_n = (00\cdots01)$ を取る。このとき関係式を $e^0 = 1$, $e^{\mu_i}\cdot e^{\mu_i} = 1$, $e^{\mu_i}e^{\mu_j} = -e^{\mu_j}e^{\mu_i}$ $(i\neq j)$ として $\alpha = \mu_{i_1}+\cdots+\mu_{i_k}\in\mathbb{Z}_2^n$ に対して $e^\alpha := e^{\mu_{i_1}}\cdots e^{\mu_{i_k}}$ とすることで $\tilde{D} := \{\pm e^\alpha|\alpha\in D\}$ は $\{\pm1\}$ を中心とする extra-special 2-group になる。この定義から交換関係式は

$$e^\alpha e^\beta = (-1)^{\langle\alpha,\beta\rangle+|\alpha|\cdot|\beta|}e^\beta e^\alpha$$

となっており、特に $\alpha,\beta\in D$ のときには $(-1)^{|\alpha|\cdot|\beta|} = 1$ より $e^\alpha e^\beta = (-1)^{\langle\alpha,\beta\rangle}e^\beta e^\alpha$ が成立する。そこで $\alpha\in D$ に対して

$$\tilde{M}_D := \bigoplus_{\alpha\in D} M_\alpha\otimes_{\{\pm1\}} e^\alpha$$

とおき、$u^{(\alpha)}\otimes e^\alpha \in M_\alpha\otimes e^\alpha$ に対してこの頂点作用素を $\tilde{Y}(u^{(\alpha)}\otimes e^\alpha,z) := Y(u^{(\alpha)},z)\otimes e^\alpha$ と定義する。このとき先程みた頂点作用素の交換関係式と、$\tilde{D}$ の交換関係式から $\tilde{M}_D$ において局所可換

$$\tilde{Y}(u,z)\tilde{Y}(v,w)\sim\tilde{Y}(v,w)\tilde{Y}(u,z)\quad(u,v\in\tilde{M}_D)$$

が成立する。こうして $\mathbf{1}^i,\omega^i$ を $L\left(\frac{1}{2},0\right)^{\otimes n}$ のテンソル積の i 番目の成分の真空元、ヴィラソロ元とし、$\tilde{\mathbf{1}} := \mathbf{1}^1\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}^n$, $\tilde{\omega}^i := \mathbf{1}^1\otimes\cdots\otimes\omega^i\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}^n$, $\tilde{\omega} := \tilde{\omega}^1+\cdots+\tilde{\omega}^n$ として $\{\tilde{M}_D,\tilde{Y},\tilde{\mathbf{1}},\tilde{\omega}\}$ は VOA になる。これをコード VOA と呼ぶ。構成からこの VOA は単純であることも明らかである。以後、偶コード D から構成された VOA という意味でこれを単に M_D と表すことにする[4]。

[4]こうすると記号が最初と逆になるが不都合は起きないと思われる。

3.2 M_D-加群

次にコード VOA M_D の加群を考えてみる。W を既約 M_D-加群とする。$(0^n) \in D$ より $M_{(0^n)} = L\left(\frac{1}{2}, 0\right)^{\otimes n} \subset M_D$ であり、W は特に $M_{(0^n)}$-加群でもある。$M_{(0^n)}$ は有理型 VOA であるから、$M_{(0^n)}$-加群として W は

$$W = \bigoplus_{h_i \in \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}\}} m_{(h_1, \cdots, h_n)} L(h_1, \cdots, h_n)$$

と分解する。ここで上の分解における最高ウェイトの組 $(h_1, \cdots, h_n)$ の中で $\frac{1}{16}$ が表れる位置は Ising 模型のフュージョン規則から M_D の作用で不動であり、W の既約性から皆同じ位置になければならない。よってこの分解において最高ウェイトが $\frac{1}{16}$ の部分を 1, $0, \frac{1}{2}$ の部分を 0 と読むことで 既約 M_D-加群 W から一意的に $\frac{1}{16}$-word $\tau(W) \in \mathbb{Z}_2^n$ が得られる。[Mi3] において次のタイプの intertwining operator

$$I^{\frac{1}{2}, \frac{1}{16}}(*, z) \in I\begin{pmatrix} & L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right) & \\ L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & & L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}$$

は 超局所可換性

$$I^{\frac{1}{2}, \frac{1}{16}}(u, z) I^{\frac{1}{2}, \frac{1}{16}}(v, w) \sim -I^{\frac{1}{2}, \frac{1}{16}}(v, w) I^{\frac{1}{2}, \frac{1}{16}}(u, z)$$

を満たすことが調べられている。よって M_D-加群 W 上での M_D の頂点作用素が局所可換を満たすことから $\langle \tau(W), D \rangle = 0$ でなければならない。

補題 $\tau(W)$ と D は直交する。

ここで $\tau(W) = (0^n)$ である場合を考える。このとき $M_{(0^n)}$-加群として W を分解したとき、最高ウェイトには $\frac{1}{16}$ は現れない。この分解における W の最高ウェイトの一つを α とすると M_D の作用から最高ウェイト $\alpha + D$ 全てが W を分解したときの成分として出てくることがフュージョン規則から分かる。よってこのとき $W = M_{\alpha+D}$ と書け、これを剰余類 (coset) 加群と呼ぶ。では $\tau(W) \neq (0^n)$ のときは W はどのような構造を持っているか考えてみよう。$\gamma \in \mathbb{Z}_2^n$ に対して $D_\gamma := \{\beta \in D | \mathrm{Supp}(\beta) \subset \mathrm{Supp}(\gamma)\}$ とする。このとき $\gamma = \tau(W)$ として D_γ を考えると、これは D の部分コードである。このとき $\beta \in D_\gamma$ に対して M_β の作用は W を $M_{(0^n)}$- 加群として分解したときの既約成分それぞれを固定する。よって W の 既約 $M_{(0^n)}$-部分加群を $W_1, \cdots, W_k$ とするとき M_{D_γ} の作用で各 W^i らは同型な成分に移る。この変換について次の定理が成り立つ。

定理 W を M_{D_γ}-加群とみたとき、既約 $\tilde{D}_\gamma$-加群 Q_i で $-e^0$ が -1 として作用しているものがあって、

$$W \simeq \bigoplus_{i=1}^{k} (W_i \otimes Q_i)$$

と分解する。

この構造から逆に $\gamma \in D^{\perp}$ として D の部分コードの加群から M_D-加群で $\tau(W) = \gamma$ となるものを構成してみよう。先の分解において $\tilde{D}$ の部分群 $\tilde{D}_\gamma$ の既約表現 Q_i らが現れた。そこで $\tilde{D}_\gamma$ の既約表現が現れるようにうまく D の部分コードを選ぶ。D_γ の中で自己直交な極大部分コード H を選んでくると、これらを内積を使って $\{\pm 1\}$ で中心拡大したとき $\tilde{H}$ は $\tilde{D}_\gamma$ の極大正規アーベル部分群であり、$\tilde{D}_\gamma$ の表現で $-e^0$ が -1 として作用する表現はすべて $\tilde{H}$ の線形表現から誘導されたものになることが群の表現論から分かる。よって H をこのように選び、χ を $-e^0$ が -1 として作用する $\tilde{H}$ の既約表現とし、F_χ をその表現空間とする。そして適当な最高ウェイト $(h_i), h_i \in \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}\}$ をこの $\frac{1}{16}$-word が $\gamma = \tau(W)$ となるように選んで、

$$U((h_i)) := L(h_1, \cdots, h_n) \otimes F_\chi$$

とおく。これは明らかに $M_{(0^n)}$-加群である。$\alpha = (a_i) \in H$ に対して Ising 模型の $\frac{a_i}{2} \times h_i$ 型の intertwining operator $I^{\frac{a_i}{2}, h_i}(*, z)$ を用いて $(u^1 \otimes \cdots \otimes u^n) \otimes e^\alpha \in M_\alpha$ の $U((h_i))$ 上の頂点作用素を

$$Y_{U((h_i))}\left((\otimes u^i) \otimes e^\alpha, z\right) := \left(\otimes I^{\frac{a_i}{2}, h_i}(u^i, z)\right) \otimes \chi(e^\alpha)$$

と定めると、

補題　$U((h_i))$ が M_H-加群になる。

次に D/H の代表系を $\{\beta^1 = (b_j^1), \cdots, \beta^s = (b_j^s)\}$ とすると $\{e^{\beta^i} | \, i = 1, \cdots, s\}$ が $\tilde{D}$ における $\tilde{H}$ の剰余類の代表系になる。これを用いて

$$\mathrm{Ind}_H^D U((h_i)) := \bigoplus_{\beta^i \in D/H} \left\{ \left(L(h_j + b_j^i/2)\right) \otimes \left(e^{\beta^i} \otimes_{\tilde{H}} F_\chi\right) \right\}$$

と置く。このとき

定理　$\mathrm{Ind}_H^D U((h_i))$ は M_D-加群になる。そして任意の既約 M_D-加群で $\tau(W) = \gamma$ となるものはこの形で構成される。

こうして既約 M_D-加群はその部分代数 M_H の加群から群の表現を用いて求められる。最後に、M_D の重要な性質として次を挙げておく。

定理　V を単純 VOA で $\dim V_0 = 1$ であり、そのヴィラソロ元が中心電荷 $1/2$ の互いに可換な共形元の和で表されているものとする。さらにこれらの共形元から生成される sub VOA $L\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ の加群として $L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right)$ が V の分解に現れないとする。このときある偶コード D があって $V \simeq M_D$ となる。

4 Framed VOA の構成

§2.3 において 枠付き VOA の定義を与えたが、もう一度復習する。$V=\oplus_{n=0}^{\infty}V_n$ を単純 VOA とし、$V_0=\mathbb{C}\mathbf{1}$ であり、そのヴィラソロ元が n 個の互いに可換な中心電荷 1/2 の有理型共形元の和で $\omega=\omega^1+\cdots+\omega^n$ と表されているとき、枠付き VOA と呼んだ[5]。このとき $L\left(\frac{1}{2},0\right)^{\otimes n}\subset V$ であり、$L\left(\frac{1}{2},0\right)^{\otimes n}$-加群として V は $L(h_i,\cdots,h_n)$ の直和に分解する。このときこの最高ウェイト (h_i) から $\frac{1}{16}$-word $\tau((h_i))$ を読みとることにより一つの偶コード S が得られる。そしてこのコードを使って同じ $\frac{1}{16}$-word になる最高ウェイト加群を一つにまとめて $V=\oplus_{\alpha\in S}V^{\alpha}$ と分解できる。この成分のうち $\alpha=(0^n)$ である V^0 は 最高ウェイト $\frac{1}{16}$ を持たないのである偶コード D があって $V^0\simeq M_D$ である。そして各 V^{α} は既約な $V^0=M_D$-加群となっている。このような VOA を 2 つの偶コード D, S で枠付されていると考えて (D,S)-framed VOA と呼ぶ。

では具体的に (D,S) が与えらたときにこれを枠に持つような枠付き VOA を構成できるだろうか。これには次の条件が満たされていれば、構成が可能である。

定理 次の条件を仮定する。

(1) D, S は長さ $8k$ の偶線形符号であって、$S\subset D^{\perp}$ である。

(2) 各 $\alpha\in S$ に対して、既約 M_D-加群 V^{α} で $\tau(V^{\alpha})=\alpha$ となるものが与えられている。

(3) $\alpha,\beta\in S$ に対して M_D-加群 としてのフュージョン規則 $V^{\alpha}\times V^{\beta}=V^{\alpha+\beta}$ を満たす。

(4) 任意の α, β, $\alpha+\beta\in S-\{(0^n)\}$ に対して $M_D\oplus V^{\alpha}\oplus V^{\beta}\oplus V^{\alpha+\beta}$ は単純 VOA の構造を持つ。

このとき $V=\bigoplus_{\alpha\in S}V^{\alpha}$ は同型を除いて一意的に単純 (D,S)-framed VOA 構造を持つ。

この仮定の中では (3) が最も重要であり、かつ難しい条件である。しかし、(拡大)[8,4,4]-Hamming code を使うと、次のように符号だけの問題に変えられる

定理 以下の 2 つの条件と上の (1), (2), (4) から (3) が従う。

(3.1) $\alpha\in S$ に対して、[8,4,4]-Hamming code の k 個の直和と同型な D の部分コード E^{α} が存在して、$E^{\alpha}_{\alpha}=\{\beta\in E^{\alpha}|\mathrm{Supp}(\beta)\subset\mathrm{Supp}(\alpha)\}$ は E^{α} の直和因子である。

(3.2) $D_{\alpha}=\{\beta\in D|\mathrm{Supp}(\beta)\subset\mathrm{Supp}(\alpha)\}$ とおくと、D_{α} の中に極大自己直交部分コード H^{α} が存在して、$H^{\alpha}+E^{\beta}=H^{\alpha+\beta}+E^{\beta}$ が任意の $\alpha,\beta\in S$ に対して成り立つ。

[5]ヴィラソロ元の仮定のみで $V_0=\mathbb{C}\mathbf{1}$ を示すことができる。詳しくは [DGH] を参照。

ここで [8,4,4]-Hamming code を定義しておく。

$$(11111111)\quad(11110000)\quad(11001100)\quad(10101010)$$

を生成元とする $\mathbb{Z}_2^8$ の 4 次元部分コードを [8,4,4]-Hamming code と呼び、ここでは H_8 で表すことにする。これは $\mathbb{Z}_2^8$ の中で唯一の自己双対偶コードである。H_8 から構成される VOA M_{H_8} は非常に性質が良く、枠付き VOA の一つである moonshine module $V^\natural$ を再構成するときにも積極的な役割を果たしている。V_{H_8} の性質の全てをここで紹介することはできないが、簡単な説明をする。先程構成した誘導加群では、加群上における頂点作用素は Ising 模型の intertwining operator を用いて構成された。そこで用いられた intertwining operator には $L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)\times L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)$ 型のものが含まれていなかったため、フュージョン規則が一通りに定まっていた。今考えている (D,S)-framed VOA の場合には $L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)\times L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)$ 型の積がどうしてもが現れてくる。Ising 模型のフュージョン規則において、この積だけは一通りに定まっていなかったために話が難しくなるのである。そこで $L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)$ のでてくるところのフュージョン規則をどう決定するかが問題になる。これは $L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)$ 一つ一つを見るのではなくて、8 個まとめて M_{H_8}-加群とみるとよいのである。これを説明しよう。M_{H_8}-加群のうち、整数もしくは半整数ウェイトを持つものは剰余類加群 $M_{\alpha+H_8}$ か $L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)^{\otimes 8}$ のみである。さらに $L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)^{\otimes 8}$ にも M_{H_8} の作用の仕方から M_{H_8}-加群としての同型類と $\beta+H_8\in Z_2^8/H_8$ に一対一対応がある。そこで同じ $L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)^{\otimes 8}$ でも M_{H_8}-加群として区別するため、$\beta+H_8$ で名前をつけてこれを $H(\frac{1}{16},\beta)$ と表す (cf.[Mi4])。coset 加群 $M_{\alpha+H_8}$ も 名前を変えて $H(\frac{1}{2},\alpha)$ と表すことにする。このときこれらのフュージョン積は 一意に定まっている。

定理 M_{H_8}-加群 $\{H(\frac{1}{2},\alpha),H(\frac{1}{16},\alpha)\}$ のフュージョン規則は次の様になる。

$$\begin{aligned}
H(\tfrac{1}{2},\alpha)\times H(\tfrac{1}{2},\beta) &= H(\tfrac{1}{2},\alpha+\beta)\\
H(\tfrac{1}{2},\alpha)\times H(\tfrac{1}{16},\beta) &= H(\tfrac{1}{16},\alpha+\beta)\\
H(\tfrac{1}{16},\alpha)\times H(\tfrac{1}{16},\beta) &= H(\tfrac{1}{2},\alpha+\beta)
\end{aligned}$$

これから、加群 $H(h,\alpha)$ を用いて VOA M_{H_8} を大きくすることができる。この加群らのフュージョン積の結果は一意的に決まっており、$H(h,\alpha)\times H(h,\alpha)=M_{H_8}$ であった。よって $M_{H_8}\oplus H(h,\alpha)$ には SVOA 構造を入れることができ、特に $h=\frac{1}{2}$ で α が偶コードのときには VOA になる。より一般に、偶コード D が $E=\oplus_{i=1}^k E^i$ で 各 E^i は $E^i\simeq H_8$ である自己双対部分コードを含んでいるとき、M_E-加群 $U=\otimes_{i=1}^k H(h^i,\alpha^i)$ から誘導加群を作ることで M_D を sub VOA に持つ VOA を作れる。

定理 $M_E\bigoplus U$ に単純 VOA 構造があり、$\tau(U)\in D^\perp$ であるとき、$M_D\bigoplus \mathrm{Ind}_{M_E}^{M_D}(U)$ には $M_E\bigoplus U$ からくる単純 VOA 構造が入る。

このように $L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)$ を 8 個まとめて M_{H_8}-加群とするとフュージョン規則がうまく決まっていき、大きな VOA にすることができるのである。

参考文献

[DGH] C.Dong, R. L. Griess Jr., and G. Höhn, Framed vertex operator algebras, codes and the moonshine module, Comm. Math. Phys. 193, No.2 (1998), 407-448.

[DMZ] C.Dong, G. Mason and Y. Zhu, Discrete series of the Virasoro algebra and the moonshine module, Proc. Symp. Pure. Math., American Math. Soc. 104, 1993.

[FHL] I. Frenkel, Y.-Z. Huang and J. Lepowsky : On axiomatic approaches to vertex operator algebras and modules, Memoirs Amer. Math. Soc. 104, 1993

[KR] V.G. Kac and A.K. Raina : Bombay lectures on highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras, World Scientific, 1987

[Li] H.-S. Li : Local systems of vertex operators, vertex superalgebras and modules, J. Pure Appl. Alg. 100 (1995), 173-216

[Mi1] M. Miyamoto : Griess algebras and conformal vectors in vertex operator algebras, J. Algebra 179 (1996) 523-548

[Mi2] M. Miyamoto : Binary codes and vertex operator (super)algebras, J. Algebra 181 (1996) 207-222

[Mi3] M. Miyamoto : Representation theory of code vertex operator algebra, J. Algebra 201 (1998) 115-150

[Mi4] M. Miyamoto : Hamming code VOA and construction of VOAs, J. Algebra 215 (1999) 509-530

[Mi5] M. Miyamoto : A new construction of the moonshine vertex operator algebra over the real number field, preprint